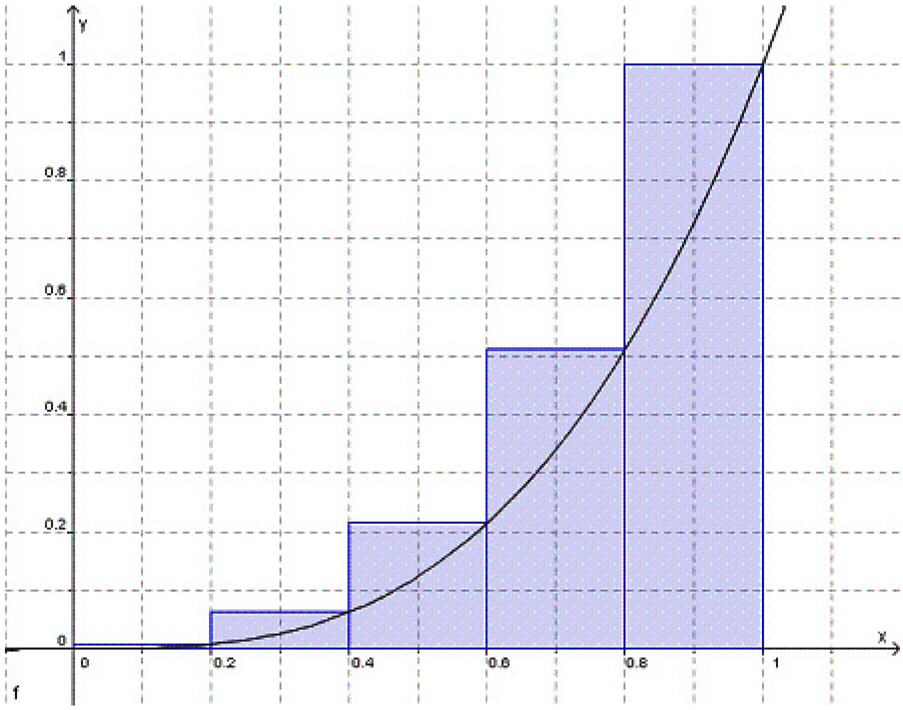
Musteraufgaben
Mathematik

20.03.2014

Aufgabe 1:
Gegeben ist die Funktion f(x) = x³.
a) Bestimme die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall [0;1] näherungsweise, in dem Du die Obersumme O_5 (Fläche der 5 Rechteckstreifen) für eine 5-Teilung bildest.



b) Schildere kurz, wie man die Genauigkeit des Verfahrens in a) erhöhen kann.
c) Bestimme die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall [0;1] rechnerisch exakt mit Hilfe eines Integrals!

Lösung für Aufgabe 1

a) $O_5 = f(0{,}2)\cdot 0{,}2 + f(0{,}4)\cdot 0{,}2 + f(0{,}6)\cdot 0{,}2 + f(0{,}8)\cdot 0{,}2 + f(1)\cdot 0{,}2$
$= 0{,}0016 + 0{,}0128 + 0{,}0432 + 0{,}1024 + 0{,}2 = 0{,}36$

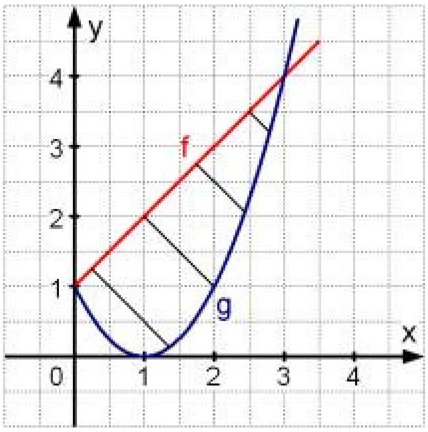
b) Die Näherung wird immer besser, wenn man die Anzahl der Rechteckstreifen erhöht.

c) $A = \left|\int_0^1 x^3 dx\right| = \left|\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1\right| = |0{,}25 - 0| = 0{,}25\text{FE}$

Aufgabe 2:

Bestimme den Inhalt der schraffierten Fläche, die von den Graphen von f und g eingeschlossen wird:

$f(x) = x + 1 \quad ; \quad g(x) = x^2 - 2x + 1$



Hinweis: Die Integrationsgrenzen dürfen der Abbildung entnommen werden!

Lösung für Aufgabe 2

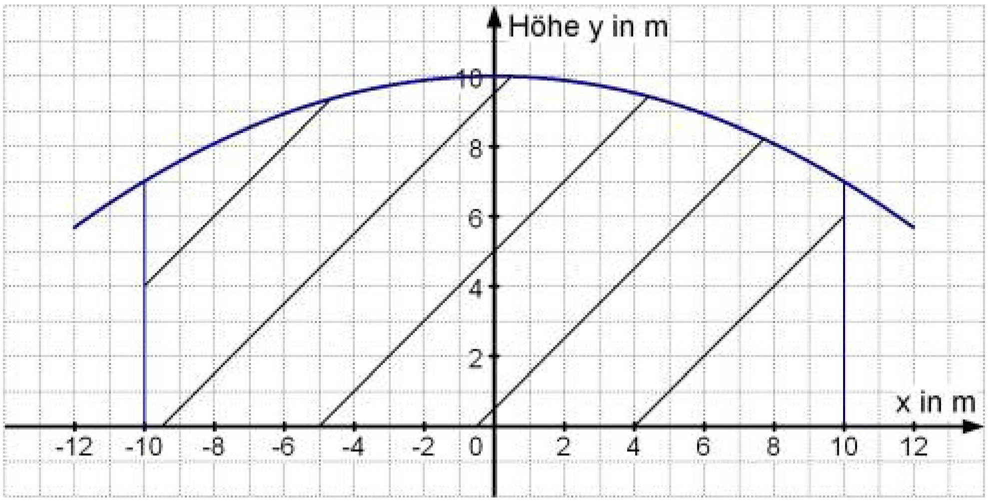
$$A_1 = \left|\int_0^3 (x+1)dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^3\right| = |4{,}5+3| = 7{,}5FE$$

$$A_2 = \left|\int_0^3 (x^2-2x+1)dx\right| = \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right]_0^3\right| = |9-9+3| = 3FE$$

$$A = A_1 - A_2 = 7{,}5FE - 3FE = 4{,}5FE$$

Aufgabe 3:

Die folgende Abbildung zeigt die Fassade eines Gebäudes. Der Graph kann durch eine quadratische Funktion der Form f(x) = ax² + c beschrieben werden.



a) Bestimme die Funktionsgleichung, die das parabelförmige Dach beschreibt!
b) Die schraffierte Fläche soll neu verputzt werden. Bestimme deren Flächeninhalt!

Lösung für Aufgabe 3

a) Ansatz: f(x) = ax² + c
P(0|10): f(0) = c = 10
Q(10|7): f(10) = 100a + 10 = 7 | -10
100a = -3 | :100
a = -0,03
$\Rightarrow$ f(x) = -0,03x² + 10

b) $A = \left|\int_{-10}^{10}(-0{,}03x^2+10)dx\right| = \left|\left[-0{,}01x^3+10x\right]_{-10}^{10}\right|$

$= \left|-10+100-(10-100)\right| = \left|90+90\right| = 180\text{FE}$

Aufgabe 4:
Bestimme den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von $f(x) = x^3 + 5x^2 - 24x$ und der x-Achse über dem Intervall [0;4]!

Lösung für Aufgabe 4
$f(x) = x^3 + 5x^2 - 24x = 0$

$x\cdot(x^2 + 5x - 24) = 0$

$x_1 = 0$ oder $x^2 + 5x - 24 = 0$

$x_{2,3} = -2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 + 24} = -2{,}5 \pm 5{,}5$

$x_2 = 3$; $x_3 = -8$

$$A = \left|\int_0^3 (x^3 + 5x^2 - 24x)dx\right| + \left|\int_3^4 (x^3 + 5x^2 - 24x)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 12x^2\right]_0^3\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 12x^2\right]_3^4\right|$$

$$= |20{,}25 + 45 - 108| + \left|64 + 106\tfrac{2}{3} - 192 - (20{,}25 + 45 - 108)\right|$$

$$= |-42{,}75| + \left|-21\tfrac{1}{3} - (-42{,}75)\right| = 42{,}75 + 21\tfrac{5}{12} = 64\tfrac{1}{6}\text{FE}$$

Aufgabe 5:
Bestimme den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von $f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$ und der x-Achse eingeschlossen wird!

Lösung für Aufgabe 5
Funktionsgleichung 0 setzen: $f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$
Erratene Nullstelle: $x_1 = 2$, denn $f(2) = 2^3 - 5\cdot2^2 - 4\cdot2 + 20 = 8 - 20 - 8 + 20 = 0$
Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 5x^2 - 4x + 20) : (x - 2) = x^2 - 3x - 10 \\
-\underline{(x^3 - 2x^2)} \\
\quad -3x^2 - 4x \\
\quad -\underline{(-3x^2 + 6x)} \\
\qquad -10x + 20 \\
\qquad -\underline{(-10x + 20)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Bestimmung der restlichen Nullstellen mithilfe der p-q-Formel:
$x^2 - 3x - 10 = 0$

$$x_{2,3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 10}$$

$$= \frac{3}{2} \pm \sqrt{12{,}25}$$

$$= 1{,}5 \pm 3{,}5$$

$x_2 = 5$; $x_3 = -2$

$$A = \left|\int_{-2}^2 (x^3 - 5x^2 - 4x + 20)dx\right| + \left|\int_2^5 (x^3 - 5x^2 - 4x + 20)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - 2x^2 + 20x\right]_{-2}^2\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - 2x^2 + 20x\right]_2^5\right|$$

$$= \left|4 - \frac{40}{3} - 8 + 40 - (4 + \frac{40}{3} - 8 - 40)\right| + \left|\frac{625}{4} - \frac{625}{3} - 50 + 100 - (4 - \frac{40}{3} - 8 + 40)\right|$$

$$= \left|22\tfrac{2}{3} - (-30\tfrac{2}{3})\right| + \left|-2\tfrac{1}{12} - 22\tfrac{2}{3}\right| = 53\tfrac{1}{3} + 24{,}75 = 78\tfrac{1}{12}\text{FE}$$

Aufgabe 6:
Bestimme den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von $f(x) = x^3 - 3x^2 - 18x$ und der x-Achse eingeschlossen wird!

Lösung für Aufgabe 6
$f(x) = x^3 - 3x^2 - 18x = 0$
$x \cdot (x^2 - 3x - 18) = 0$
$x_1 = 0$ oder $x^2 - 3x - 18 = 0$

$$x_{2,3} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 18} = 1{,}5 \pm 4{,}5$$
$$x_2 = -3 \;;\; x_3 = 6$$

$$A = \left| \int_{-3}^{0} (x^3 - 3x^2 - 18x)dx \right| + \left| \int_{0}^{6} (x^3 - 3x^2 - 18x)dx \right|$$
$$= \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 \right]_{-3}^{0} \right| + \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 \right]_{0}^{6} \right|$$
$$= \left| 0 - (20{,}25 + 27 - 81) \right| + \left| 324 - 216 - 324 - 0 \right|$$
$$= \left| 33{,}75 \right| + \left| -216 \right| = 249{,}75\text{FE}$$

Aufgabe 7:
Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^4 + 2$ mit $a > 0$. Wie muss der Parameter a gewählt werden, damit die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall [1;2] den Inhalt 9,75 FE besitzt ?

Lösung für Aufgabe 7
$$A = \int_{1}^{2} (ax^4 + 2)dx = \left[\frac{1}{5}ax^5 + 2x \right]_{1}^{2} = 6{,}4a + 4 - (0{,}2a + 2) = 6{,}2a + 2 = 9{,}75$$
$$6{,}2a = 7{,}75 \quad \Rightarrow \quad a = 1{,}25$$

Aufgabe 8:

Bestimme die Menge aller Stammfunktionen von f (unbestimmtes Integral):

a) $f(x) = 3x^5 + 9x$ b) $f(x) = \frac{6}{x^4}$

Lösung für Aufgabe 8

a) $F(x) = \frac{1}{2}x^6 + \frac{9}{2}x^2 + C$

b) $f(x) = \frac{6}{x^4} = 6 \cdot x^{-4}$ $F(x) = -2 \cdot x^{-3} + C = -\frac{2}{x^3} + C$

Aufgabe 9:

Bestimme den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$ und der x-Achse über dem Intervall [0;4]

Lösung für Aufgabe 9

Funktionsgleichung 0 setzen: $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$

Erratene Nullstelle: $x_1 = 2$, denn $f(2) = 2^3 - 4\cdot 2^2 - 4\cdot 2 + 16 = 8 - 16 - 8 + 16 = 0$

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 4x^2 - 4x + 16) : (x - 2) = x^2 - 2x - 8 \\
-\underline{(x^3 - 2x^2)} \\
\quad -2x^2 - 4x \\
\quad -\underline{(-2x^2 + 4x)} \\
\qquad -8x + 16 \\
\qquad -\underline{(-8x + 16)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Bestimmung der restlichen Nullstellen mithilfe der p-q-Formel:

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$$
\begin{aligned}
x_{2,3} &= 1 \pm \sqrt{1+8} \\
&= 1 \pm \sqrt{9} \\
&= 1 \pm 3
\end{aligned}
$$

$x_2 = 4$; $x_3 = -2$

$$
\begin{aligned}
A &= \left|\int_0^2 (x^3 - 4x^2 - 4x + 16)dx\right| + \left|\int_2^4 (x^3 - 4x^2 - 4x + 16)dx\right| \\
&= \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 16x\right]_0^2\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 16x\right]_2^4\right| \\
&= \left|4 - \frac{32}{3} - 8 + 32 - 0\right| + \left|64 - \frac{256}{3} - 32 + 64 - (4 - \frac{32}{3} - 8 + 32)\right| \\
&= \left|17\tfrac{1}{3} - 0\right| + \left|10\tfrac{2}{3} - 17\tfrac{1}{3}\right| = 17\tfrac{1}{3} + 6\tfrac{2}{3} = 24 \text{ FE}
\end{aligned}
$$