Musteraufgaben
Mathematik

20.03.2014

Aufgabe 1:
Bestimme die Nullstellen der folgenden ganzrationalen Funktion: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

Lösung für Aufgabe 1
Funktionsgleichung 0 setzen: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$
Erratene Nullstelle: $x_1 = 2$, denn $f(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 8 = 8 - 20 + 4 + 12 = 0$
Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 5x^2 + 2x + 8) : (x - 2) = x^2 - 3x - 4 \\
-\underline{(x^3 - 2x^2)} \\
\quad -3x^2 + 2x \\
\quad -\underline{(-3x^2 + 6x)} \\
\qquad -4x + 8 \\
\qquad -\underline{(-4x + 8)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Bestimmung der restlichen Nullstellen mithilfe der p-q-Formel:
$x^2 - 3x - 4 = 0$

$$
\begin{aligned}
x_{2,3} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 4} \\
&= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\
&= \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

$x_2 = 4$; $x_3 = -1$

Aufgabe 2:
Kurvendiskussion:
Untersuche die Funktion $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 8$ auf
a) Definitionsbereich;
b) Symmetrieverhalten (mit Begründung);
c) Nullstellen;
d) Schnittpunkt mit der y-Achse;
e) Verhalten im Unedlichen;
f) Extrempunkte und Art der Extrempunkte;
g) Wendepunkte und Art der Wendepunkte;
h) Skizze

Lösung für Aufgabe 2
zu a) **D** = **R**

zu b) Der Graph ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, da die Summanden gerade und ungerade Exponenten enthalten.

zu c)
Funktionsgleichung 0 setzen: $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 8 = 0$
Erratene Nullstelle: $x_1 = 1$, denn $f(1) = 2\cdot 1^3 - 12\cdot 1^2 + 18\cdot 1 - 8 = 2 - 12 + 18 - 8 = 0$
Polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 - 12x^2 + 18x - 8) : (x - 1) = 2x^2 - 10x + 8 \\
-\underline{(2x^3 - 2x^2)} \\
\quad -10x^2 + 18x \\
\quad -\underline{(-10x^2 + 10x)} \\
\qquad\qquad 8x - 8 \\
\qquad\quad -\underline{(8x - 8)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Bestimmung der restlichen Nullstellen mithilfe der p-q-Formel:
$2x^2 - 10x + 8 = 0 \quad | :2$
$x^2 - 5x + 4 = 0$

$$
\begin{aligned}
x_{2,3} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 4} \\
&= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \\
&= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

$x_2 = 4 \;;\; x_3 = 1$ (doppelte Nullstelle)

zu d) $f(0) = -8 \Rightarrow$ **$S_y(0|-8)$**

zu e) $f'(x) = 6x^2 - 24x + 18 = 0 \quad | :6$

$$
\begin{aligned}
x^2 - 4x + 3 &= 0 \\
x_{1,2} &= 2 \pm \sqrt{4 - 3} \\
&= 2 \pm \sqrt{1} \\
&= 2 \pm 1 \\
x_1 = 3 \;&;\; x_2 = 1
\end{aligned}
$$

$f''(x) = 12x - 24$
$f''(3) = 12\cdot 3 - 24 = 36 - 24 = 12 > 0 \Rightarrow$ **TP (3|-8)**
$f(3) = 2\cdot 3^3 - 12\cdot 3^2 + 18\cdot 3 - 8 = -8$
$f''(1) = 12\cdot 1 - 24 = 12 - 24 = -12 < 0 \Rightarrow$ **HP (1|0)**
$f(1) = 2\cdot 1^3 - 12\cdot 1^2 + 18\cdot 1 - 8 = 0$

zu f) $f''(x) = 12x - 24 = 0 \quad | :12$
$x - 2 = 0 \quad | +2$
$x = 2$

$f'''(x) = 12$
$f'''(2) = 12 > 0 \Rightarrow$ **R-L-WP (2|-4)**
$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 18 \cdot 2 - 8 = -4$

zu g)